ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VÂN

GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC TRÊN MỘT MIỀN NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VÂN

GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC TRÊN MỘT MIỀN NGUYÊN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin gửi lời biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn đã hướng dẫn tôi hoàn thành bản luận văn này. Khi bắt đầu nhận đề tài thực sự tôi cảm nhận mang nhiều nội dung khó và mới mẻ. Hơn nữa vốn kiến thức ít ỏi cùng với kinh nghiệm làm đề tài không nhiều nên tôi chưa thực sự tự tin để tiếp cận đề tài. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng Cô vẫn dành nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn, động viên khuyến khích tôi trong suốt thời gian tôi thực hiện đề tài. Trong quá trình tiếp cận đề tài đến quá trình hoàn thiện luận văn Cô luôn tận tình chỉ bảo và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi. Cho đến bây giờ luận văn thạc sĩ của tôi đã được hoàn thành cũng chính là nhờ sự chỉ bảo, nhắc nhở, đôn đốc và sự giúp đỡ nhiệt tình của Cô.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Bam Giám hiệu, Khoa Toán- Tin và phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn các Thầy Cô đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thiện luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ long biết ơn tới gia đình, bạn bè và các thành viên trong lớp cao học Toán K10C (khóa 2016-2018) đã động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian học tập và thực hiện luận văn.

Lời nói đầu

Sự tương tự giữa số nguyên tố và đa thức bất khả quy là một chủ đề trọng tâm trong sự phát triển của Lý thuyết số Hình học đại số. Nhiều kết quả về số nguyên tố có thể phiên dịch sang kết quả về đa thức bất khả quy. Chẳng hạn, tương tự như Định lí cơ bản của số học, ta có kết quả sau cho đa thức: Nếu $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ có hệ số cao nhất là a, thì f có sự phân tích $f = af_1...f_t$ với f_i là bất khả quy có hệ số cao nhất bằng 1, và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử. Tuy nhiên, có những giả thuyết cho thấy giữa số nguyên tố và đa thức bất khả quy đã vượt xa sự tương tự. Một trong những vấn đề như thế là giả thuyết của Bouniakowski về giá trị nguyên tố của đa thức bất khả quy.

Chú ý rằng nếu đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ nhận vô hạn giá trị nguyên tố, thì nó bất khả quy. Vì thế, năm 1857, Bouniakowski đã đặt ra giả thuyết cho chiều ngược lại: Nếu $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$, thì $f(x)$ nhận vô hạn giá trị nguyên tố. Cho đến nay, giả thuyết này vẫn là vấn đề lớn chưa được giải quyết khi bậc của đa thức lớn hơn 1. Trường hợp đa thức bậc 1 đã được giải quyết bởi Dirichlet năm 1837.

Mục đích luận văn trình bày một số kết quả gần đây về giá trị đa thức (giá trị nguyên tố, hợp số, khả nghịch) dựa theo tài liệu tham khảo [2], [3], [5].

Luận văn gồm có 2 chương. Trong chương 1, luận văn quan tâm đến Định lí Dirichlet: Đa thức $f(x) = ax + b \in \mathbb{Z}[x]$ với $(a, b) = 1$, nhận vô hạn giá trị nguyên tố. Định lí Dirichlet là câu trả lời cho giả thuyết của Bouniakowski khi đa thức bậc 1. Mặc dù chứng minh cho Định lí Dirichlet là rất khó và cần đến kết quả sâu sắc, nhưng khi đa thức có dạng đặc biệt (chẳng hạn $4x \pm 1$, $6x + 5$, $8x + 1$) thì chứng minh lại rất sơ cấp, dựa theo kĩ thuật mà Euclid dùng để chứng minh tập số nguyên tố là vô hạn. Chúng tôi cũng vận dụng kết quả để giả một số bài toán thi học sinh giỏi bậc THPT.

Chương 2 quan tâm đến một số vấn đề mở rộng của giả thuyết Bouniakowski. Trước hết, là câu hỏi liệu đa thức bậc dương luôn có vô hạn ước nguyên tố? Câu trả lời khẳng định được đưa ra bởi Schur. Trong tiết 2.1, dựa theo tài liệu [3], chúng tôi đưa ra một chứng minh sơ cấp cho kết quả của Schur và ứng dụng của chứng minh một số trường hợp đặc biệt cho Định lí Dirichlet. Tiếp theo câu hỏi liệu tồn tại đa thức bậc lớn hơn 1 nhận nhiều tùy ý giá trị nguyên tố? Câu hỏi này được Betty Garison trả lời khẳng định trong [2]. Chúng tôi trình bày kết quả này trong Tiết 2.1, dựa theo tài [3], chúng tôi đưa ra một chứng minh sơ cấp cho kết quả của Schur và ứng dụng chứng minh một số trường hợp đặc biệt cho Định lí Dirichlet. Tiếp theo là câu hỏi liệu tồn tại đa thức lớn hơn 1 nhận nhiều tùy ý giá trị nguyên tố? Câu hỏi này được Betty Garison trả lời khẳng định trong [2]. Chúng tôi trình bày chính kết quả này trong Tiết 2.2. Chú ý rằng đa thức có hệ số nguyên bất khả quy luôn nhận giá trị hợp số, chẳng hạn như $x^2 - x + 6$, $x^3 - x + 9$, nhưng không tồn tại đa thức bậc dương có hệ số nguyên luôn nhận giá trị nguyên tố (xem Bổ đề 2.4.1). Vì thế vấn đề đặt ra là liệu rằng Bổ đề 2.4.1 có thể mở rộng cho đa thức trên miền phân tích duy nhất? Câu trả lời được đưa ra trong bài báo của S. H. Weintraub [5]. Ông chỉ ra rằng nếu miền phân tích duy nhất chỉ có hữu hạn phần tử khả nghịch, thì mọi đa thức bậc dương đều nhận ít nhất một giá trị hợp số. Tuy nhiên kết quả không còn đúng khi có vô hạn phần tử khả nghịch. Các kết quả này chúng tôi trình bày trong cuối Chương 2.

Vì đây là một luận văn thạc sĩ chuyên ngành toán sơ cấp, chúng tôi cố gắng đưa ra các chứng minh sơ cấp cho các kết quả. Hiện tại, vẫn chưa có chứng minh sơ cấp cho Định lí Dirichlet, vì thế chúng tôi chỉ trình bày tóm tắt các ý chính của định lí này.

Chương 1

Đa thức hệ số nguyên với vô hạn giá trị nguyên tố

1.1 Kiến thức chuẩn bị

Trước hết, chúng ta nhắc lại khái niệm và kết quả quen biết về số nguyên tố và sự phân bố số nguyên tố.

Định nghĩa 1.1.1 *Số nguyên tố* là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước số dương là 1 và chính nó. Các số tự nhiên có nhiều hơn hai ước số dương được gọi là *hợp số*.

Chú ý rằng số 1 không phải là số nguyên tố và cũng không phải là hợp số. Ước số tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên là một số nguyên tố.

Sau đây là một số tính chất của số nguyên tố.

Tính chất 1.1.2 *Các phát biểu sau đây là đúng.*

i) Cho p là số nguyên tố và a là số tự nhiên. Khi đó $(a, p) = p$ nếu và chỉ nếu p là ước của a, $(a, p) = 1$ khi và chỉ khi p không là ước của a.

ii) Nếu tích của hữu hạn số tự nhiên chia hết cho số nguyên tố p thì có ít nhất một thừa số chia hết cho p.

iii) Số 2 là số nguyên tố nhỏ nhất và là số nguyên tố chẵn duy nhất.

iv) Nếu n là hợp số thì n có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$. Đặc biệt, nếu số tự nhiên $a > 1$ không có ước nguyên tố trong nửa khoảng $(1; \sqrt{a}\,]$ thì a cũng là số nguyên tố.

Định lý 1.1.3 (Định lý cơ bản của số học) *Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các thừa số.*

Định lý 1.1.4 (Định lý Euclid) *Tập các số nguyên tố là vô hạn.*

Nhắc lại hàm số học: Hàm số học là hàm số xác định trên tập các số nguyên dương.

Định nghĩa 1.1.5 Kí hiệu $\Pi(x)$ là hàm số học biểu thị số các số nguyên tố không vượt quá x. Chẳng hạn $\Pi(10) = 4, \Pi(25) = 9, \Pi(100) = 25$. Do tập các số nguyên tố là vô hạn nên ta có $\Pi(x) \to \infty$ khi $x \to \infty$.

Chúng ta đã biết hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ được gọi là tương đương khi $x \to \infty$ nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ tương đương khi $x \to \infty$ ta viết $f(x) \sim g(x)$.

Định lý 1.1.6 (Định lý phân bố số nguyên tố) $\Pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.

Phần tiếp theo chúng ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả về nghiệm của đa thức.

Định nghĩa 1.1.7 Cho V là vành con của vành giao hoán S. Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in V[x]$. Một phần tử $c \in S$ được gọi là *nghiệm* của $f(x)$ trong S nếu $f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots a_1 c + a_0 = 0$. Trong trường hợp này ta cũng nói c là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Chẳng hạn, xét đa thức $f(x) = x^2 - 2$ và $g(x) = x^2 + 1$ trong vành $\mathbb{Q}[x]$. Rõ ràng $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ đều chứa $\mathbb{Q}$. Ta có $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ là nghiệm của $f(x)$ và $\pm i \in \mathbb{C}$ là nghiệm của $g(x)$.

Chú ý rằng phần tử $a \in V$ là nghiệm của $f(x) \in V[x]$ nếu tồn tại đa thức $g(x) \in V[x]$ sao cho $f(x) = (x - a)g(x)$.

Định nghĩa 1.1.8 Cho V là một vành giao hoán. Giả sử $k > 0$ là một số tự nhiên và S là một vành giao hoán chứa V. Một phần tử $a \in S$ được gọi là *nghiệm bội k* của $f(x)$ nếu trong vành $S[x]$, đa thức $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-a)^{k+1}$. Nếu $k = 1$ thì a được gọi là *nghiệm đơn*. Nếu $k = 2$ thì a được gọi là *nghiệm kép*.

Chẳng hạn cho $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, khi đó i và $-i$ là hai nghiệm kép của $f(x)$ và -1 là nghiệm đơn của $f(x)$ bởi vì trong $\mathbb{C}[x]$ ta có phân tích $f(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x+1)$.

Từ định nghĩa, ta có các kết quả sau.

Bổ đề 1.1.9 *Phần tử $a \in V$ là nghiệm bội k của $f(x) \in V[x]$ nếu và chỉ nếu tồn tại $g(x) \in V[x]$ sao cho $f(x) = (x-a)^k g(x)$ và $g(a) \neq 0$.*

Hệ quả 1.1.10 *Cho V là miền nguyên và $f(x) \in V[x]$ là một đa thức. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_r \in V$ là những phần tử đôi một khác nhau và a_i là nghiệm bội k_i của $f(x)$ với $i = 1, ..., r$. Khi đó tồn tại $u(x) \in V[x]$ sao cho $f(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_{r_i})^{k_r} u(x)$ và $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, ..., r$.*

Hệ quả 1.1.11 *Cho V là miền nguyên và $f(x) \in V[x]$. Nếu $f(x) \neq 0$ thì số nghiệm của $f(x)$, mỗi nghiệm tính với số bội của nó, không vượt quá bậc của $f(x)$.*

Hệ quả 1.1.12 *Cho V là miền nguyên và $f(x), g(x) \in V[x]$ là hai đa thức có bậc không quá n. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ nhận giá trị bằng nhau tại $n+1$ phần tử khác nhau của V thì $f(x) = g(x)$.*

1.2 Đa thức bất khả quy và giá trị nguyên tố

Trong suốt tiết này, luôn giả thiết K là một trường.

Định nghĩa 1.2.1 Một đa thức $f(x) \in K[x]$ được gọi là *bất khả quy* nếu $\deg f(x) > 0$ và $f(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức có bậc bé hơn. Nếu $\deg f(x) > 0$ và $f(x)$ là tích của hai đa thức có bậc bé hơn thì ta nói $f(x)$ *khả quy*.

Chú ý rằng, đa thức bậc nhất luôn bất khả quy; đa thức bậc hai hoặc bậc ba là bất khả quy nếu và chỉ nếu nó không có nghiệm trên K. Sau đây là một số kết quả về đa thức bất khả quy tương tự như những kết quả quen biết về số nguyên tố.

Đa thức monic là đa thức có hệ số cao nhất bằng 1. Định lý sau đây về phân tích đa thức là sự tương tự của Định lý cơ bản của số học về phân tích số tự nhiên.

Định lý 1.2.2 (xem [1] trang 64) *Mọi đa thức bậc dương $f(x) \in K[x]$ đều phân tích được thành tích của hữu hạn đa thức bất khả quy. Hơn nữa, $f(x)$ có duy nhất (nếu không kể đến thứ tự các nhân tử) một phân tích dạng $f(x) = af_1(x) \cdots f_t(x)$, trong đó a là hệ số cao nhất của $f(x)$ và $f_1(x), ..., f_t(x)$ là đa thức monic bất khả quy.*

Mệnh đề 1.2.3 (xem [1]) *Cho $f(x), g_1(x), ..., g_k(x) \in K[x]$ giả sử $f(x)$ bất khả quy và $f(x)$ là ước của $g_1(x) \cdots g_k(x)$. Khi đó tồn tại một đa thức $g_i(x)$ sao cho $g_i(x)$ chia hết cho $f(x)$.*

Mệnh đề 1.2.4 *Có vô hạn đa thức bất khả quy trên K.*

Chứng minh. Giả sử chỉ có hữu hạn đa thức bất khả quy là $f_1(x), ..., f_m(x)$. Ta xét đa thức $f(x) = f_1(x) \cdots f_m(x) + 1$. Khi đó tồn tại một đa thức $g(x)$ bất khả quy và $g(x)$ là ước của $f(x)$. Vì $f_i(x)$ không là ước của $f(x)$ nên $g(x) \neq f_i(x)$, suy ra điều giả sử là sai. □

Phần tiếp theo, chúng ta xét đa thức bất khả quy trên các trường $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Định lý cơ bản của Đại số phát biểu rằng mọi đa thức với hệ số phức bậc n có đúng n nghiệm phức. Do đó các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{C}$ là và chỉ là các đa thức bậc nhất. Hơn nữa, nếu $a + bi \in \mathbb{C}$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, thì $a - bi$ cũng là nghiệm của $f(x)$. Do đó, các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}$ là và chỉ là các đa thức bậc 1 hoặc bậc 2 không có nghiệm thực. Bài toán xét tính bất khả quy của đa thức trên $\mathbb{Q}$ cho đến nay vẫn là bài toán mở. Có một số phương pháp xét tính bất khả quy quen biết như phương pháp dựa vào nghiệm hữu tỷ, phương pháp dùng